Über die orthogonalen Funktionen. II (Summation).

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Einleitung.[1])

In dieser Mitteilung werden einige Fragen betreffs der Summation der quadratisch integrierbaren orthogonalen Entwicklungen behandelt.

Bekanntlich folgt aus der (C, α)-Summierbarkeit einer Reihe (für irgendeinen Parameterwert $\alpha > 0$), auch ihre Abel-Summierbarkeit (siehe z. B. A. ZYGMUND [1], 43). Umgekehrt, ist eine quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung im Grundintervall fast überall Abel-summierbar, so ist sie für jeden Parameterwert $\alpha > 0$ im Grundintervall fast überall (C, α)-summierbar (A. ZYGMUND [2]). Auf Grund dieser Sätze sind für quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklungen die Abelsche Summierbarkeit und die (C, α)-Summierbarkeit (für jeden Parameterwert $\alpha > 0$), abgesehen von einer Menge vom Maße Null, miteinander äquivalent.

So kann man in den Annahmen bzw. Behauptungen unserer Sätze die $(C, 1)$-Summierbarkeit mit (C, α)-Summierbarkeit $(\alpha > 0)$, oder auch mit Abelscher Summierbarkeit ersetzen.

Es sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthogonales und normiertes Funktionensystem. Die n-te Partialsumme der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) \tag{1}$$

wird mit $s_n(x)$ bezeichnet:

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Genügt die Koeffizientenfolge der Bedingung $\{c_\nu\} \in l^2$, d. h. ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 < \infty, \tag{2}$$

[1]) Bezüglich der gebrauchten Bezeichnungen und Begriffe verweisen wir auf Mitteilung I (K. TANDORI [1]).

so gilt bekanntlich fast überall die Abschätzung

$$s_n(x) = o(\log n) \tag{3}$$

(H. RADEMACHER [1], 122).

In Mitteilung I (Satz III) haben wir gezeigt, daß diese Abschätzung im allgemeinen nicht verbessert werden kann.

Wir setzen nun, außer der Bedingung (2), noch voraus, daß die Reihe (1) im Grundintervall fast überall $(C, 1)$-summierbar ist. Bekanntlich konvergiert dann die Teilfolge $\{s_{2^n}(x)\}$ fast überall (A. N. KOLMOGOROFF [1][2])), und so könnte man hoffen, daß in diesem Falle die Abschätzung (3) verbessert werden kann. Wir werden beweisen, daß dies im allgemeinen unmöglich ist. Nämlich gilt der

Satz I. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, für die die Bedingung*

$$w(n) = o(\log n)$$

erfüllt wird. Dann kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, derart, daß die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{4}$$

in $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$-summierbar ist und jedoch fast überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty$$

gilt. Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

D. MENCHOFF [1] hat den folgenden Satz bewiesen: *Ist*

$$\sum_{\nu=4}^{\infty} c_\nu^2 (\log\log \nu)^2 < \infty, \tag{5}$$

so ist die orthogonale Reihe (1) für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ fast überall $(C, 1)$-summierbar.

Er hat auch gezeigt, daß die Bedingung (5) im allgemeinen nicht geschwächt werden kann. Es besteht nämlich der folgende Satz:

Es sei $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge mit $W(n) = o(\log\log n)$. Dann kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes

---

[2]) Es wirt dort bewiesen, daß für jede quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung der Unterschied der n_k-ten $(C, 1)$-Mittel und der n_k-ten Partialsumme fast überall gegen Null strebt, wenn $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist.

Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ *derart angegeben werden, daß*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 W^2(n) < \infty$$

ist und die Reihe (4) *nirgends* $(C, 1)$*-summierbar ist.*

Wir werden diesen Menchoffschen Satz folgendermaßen verschärfen:

Satz II. *Es sei eine positive Zahlenfolge* $\{a_n^*\} \in l^2$ *vorgegeben, für die die Bedingungen*

$$\sqrt{n}\, a_n^* \geqq \sqrt{n+1}\, a_{n+1}^* \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} (a_n^*)^2 (\log\log n)^2 = \infty \tag{7}$$

erfüllt sind. Man kann dann ein im Grundintervall $[a, b]$ *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart angeben, daß die Reihe* (4) *für jede solche Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *fast überall nicht* $(C, 1)$*-summierbar ist, welche die Bedingungen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \tag{8}$$

und $a_n \geqq \eta a_n^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (*mit einem konstanten* $\eta > 0$) *erfüllt.*

Dieser Satz und der obige Menchoffsche Satz ergeben also folgendes:

Es sei $\{c_\nu\}$ *eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung* $\sqrt{\nu}\, c_\nu \geqq \sqrt{\nu+1}\, c_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *erfüllt. Dann ist die Menchoffsche Bedingung* (5) *nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig dafür, daß die Reihe* (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar ist.*

Der Satz II beantwortet ein Problem von G. Alexits, ob es eine quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung mit positiver monoton nichtwachsender Koeffizientenfolge gibt, die fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist. Aus Satz II folgt sogar, daß es eine quadratisch integrierbare orthogonale Entwicklung mit positiver, monoton nichtwachsender und (nach unten) konvexer Koeffizientenfolge gibt, die fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist. Nach Satz II gibt es nämlich z. B. ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die Reihe

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(\log n)(\log\log n)^3}}\, \Phi_n(x)$$

fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist.

Es sei bemerkt, daß aus Bedingung (6) folgt, daß die Folge $\{a_n^*\}$ monoton abnehmend ist. Für die Gültigkeit des Satzes II ist aber die Bedingung nicht genügend, daß die Folge $\{a_n^*\}$ monoton abnehmend sei. Es gibt nämlich eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge $\{a_n^*\}$, die die Bedingung (7) erfüllt, und doch die orthogonale Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \varphi_n(x)$$

für jedes orthonormiertes Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $(C, 1)$-summierbar ist (siehe G. ALEXITS [1]).

Endlich soll bemerkt werden, daß die Bedingung (8) keine wesentliche Beschränkung bedeutet. Ist nämlich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty,$$

so ist die Rademachersche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x)$$

mit jeder Toeplitzschen Methode fast überall nicht-summierbar (A. ZYGMUND [3]).

Es kann leich gezeigt werden, daß Satz II den entsprechenden Menchoffschen Satz enthält.

Es sei nämlich $\{W(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung $W(n) = o(\log\log n)$ erfüllt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $W(n) \leqq \log\log n$ für jedes $n \geqq 4$ angenommen werden. Da

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} = \infty$$

ist, so kann eine Indexfolge $\{N_m\}$ $(N_0 = 4)$ definiert werden, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\frac{W(n)}{\log\log n} \leqq \frac{1}{m} \quad (N_{m-1} \leqq n < N_m;\ m = 1, 2, \ldots),$$

$$(1 <) \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m - 1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \leqq \sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Es sei

$$v^2(m) = \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m - 1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Offenbar ist $\{v(m)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Es sei $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n = 1, 2)$ und

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(\log n)(\log\log n)^3}\, v(m)} \quad (N_{m-1} \leqq n < N_m;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Offenbar ist $\sqrt{n}\,a_n \geqq \sqrt{n+1}\,a_{n+1}$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\{a_n\} \in l^2$ und

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{v^2(m)} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} = \sum_{m=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

So ergibt sich mit Anwendung des Satzes II, daß ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ existiert, für welches die Reihe (4) fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist. Wenn wir die Werte der Funktionen $\{\Phi_n(x)\}$ in einer Menge vom Maß Null auf geeignete Weise verändern (z. B. auf dieser Menge $\Phi_n(x) = \infty$ $(n=0, 1, \ldots)$ setzen), können wir erreichen, daß diese Reihe in $[a, b]$ nirgends $(C, 1)$-summierbar ist.

Andererseits ist

$$\sum_{n=4}^{\infty} a_n^2\, W^2(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \frac{W^2(n)}{n(\log n)(\log\log n)^3 v^2(m)} \leqq$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 v^2(m)} \sum_{n=N_{m-1}}^{N_m-1} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty.$$

Also erfüllen dieses orthonormierte Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und diese Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ die in dem Menchoffschen Satz vorkommenden sämtlichen Bedingungen. Damit wurde gezeigt, daß der Menchoffsche Satz aus dem Satz II folgt.

Ob das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ im Satz II gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann, ist noch eine offene Frage.

G. ALEXITS [1] hat neulich den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $\{a_n^*\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, die die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{\sqrt{n}} < \infty \tag{9}$$

erfüllt. Ist $c_\nu = O(a_\nu^*)$, so ist für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ die Reihe (1) *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar.*

G. ALEXITS hat die Vermutung ausgesprochen, daß die Bedingung (9) nicht geschwächt werden kann. Bezüglich dieser Vermutung werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz III. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung*

$$\sqrt{n} = o(w(n))$$

erfüllt. Dann kann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Grundintervall

$[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, derart, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{w(n)} < \infty$$

ist, und die Reihe (4) im Intervall $[a, b]$ fast überall nicht $(C, 1)$-summierbar ist.

Ob das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ gleichmäßig beschränkt gewählt werden kann, ist noch eine offene Frage.

Herrn Prof. Á. Császár, der diese Arbeit in Manuskript gelesen und mit einigen wertvollen Bemerkungen zur Vervollständigung derselben beigetragen hat, möchte ich meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

§ 1. Hilfssätze.

Zum Beweis unseres Sätze werden wir einige Hilfssätze benötigen.

Hilfssatz. I. *Es seien c und $p(\geqq 2)$ gegebene natürliche Zahlen. Dann kann ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{f_l(c, p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ im Intervall $[0, 5]$ angegeben werden, so daß die folgende Bedingung erfüllt wird:*

Für jedes $x \in \left(\frac{2}{c}, \frac{3}{c}\right)$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (< p)$, so das die Funktionenwerte $f_1(c, p; x), \ldots, f_{p+m(x)}(c, p; x)$ positiv sind und die Ungleichung

$$f_1(c, p; x) + \cdots + f_{p+m(x)}(c, p; x) \geqq A\sqrt{cp} \log p$$

besteht, wo A eine von c, p und x unabhängige positive Zahl ist.

Dieser Hilfssatz ist als Hilfssatz II in Mitteilung I enthalten.

Hilfssatz II. *Es sei $p(\geqq 4)$ eine natürliche Zahl. Es existiert eine von p unabhängige Konstante $\beta(> 2)$ derart, daß im Intervall $[-1, \beta]$ ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{g_l(p; x)\}$ $(l = 1, \ldots, p^2)$ definiert werden kann, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:*

a) $$|g_l(p; x)| \leqq M \qquad (l = 1, \ldots, p^2; \ -1 \leqq x \leqq \beta)$$

mit einer von p unabhängigen Konstanten M,

b) *für jedes $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x) (< p^2)$, so daß die Funktionenwerte $g_1(p; x), \ldots, g_{m(x)}(p; x)$ positiv sind und*

$$g_1(p; x) + \cdots + g_{m(x)}(p; x) \geqq Cp \log p$$

mit einer von p und x unabhängigen positiven Konstanten C gilt.

Dieser Hilfssatz ist auch in Mitteilung I enthalten (der Fall $c=1$ von Hilfssatz II').

Hilfssatz III. *Es seien $c, p(\geqq 2), a_1, \ldots, a_{2p}$ gegebene natürliche Zahlen. Es sei $s_0=0$, $s_i=a_1+\cdots+a_i$ $(i=1, \ldots, 2p)$ und $\bar{a}_l=a_i$ für $s_{i-1}<l\leqq s_i$ $(i=1, \ldots, 2p)$. Dann kann ein orthonormiertes Funktionensystem von Treppenfunktionen $h_l(x)=h_l(c, p, \{a\}; x)$ $(l=1, \ldots, s_{2p})$ im Grundintervall $[0, 1]$ angegeben werden, so daß die folgende Bedingung erfüllt wird:*

es gibt eine einfache Menge[3]) $E=E(c, \{a\})\subset[0, 1]$ *vom Maße* $\mu(E)=\dfrac{1}{5c}$

mit der Eigenschaft, daß für jedes $x\in E$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)(<2p)$ derart gibt, daß die Funktionenwerte $h_1(x), \ldots, h_{s_{m(x)}}(x)$ nichtnegativ sind und

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}}h_1(x)+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{s_{m(x)}}}}h_{s_{m(x)}}(x)\geqq\sqrt{5}A\sqrt{cp}\log p$$

gilt, wo A die im Hilfssatz I vorkommende positive Konstante bedeutet.

Beweis von Hilfssatz III. Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in $N=a_1\ldots a_{2p}$ gleiche Teile; die einzelnen Teilintervalle seien $I_\varrho=[u_\varrho, v_\varrho]$ $(\varrho=1, \ldots, N)$, also ist $\mu(I_\varrho)=\dfrac{1}{N}$ $(\varrho=1, \ldots, N)$.

Dann sei

$$f_{l,\varrho}(x)=\begin{cases}\sqrt{5}f_l\left(c, p; 5\dfrac{x-u_\varrho}{v_\varrho-u_\varrho}\right) & \text{für} \quad u_\varrho<x<v_\varrho,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(\varrho=1, \ldots, N;\ l=1, \ldots, 2p)$, wo $f_l(c, p; x)$ $(l=1, \ldots, 2p)$ die sich mit Anwendung des Hilfssatzes I ergebenden Funktionen sind. Es sei ferner

$$E_\varrho=\left[\frac{v_\varrho-u_\varrho}{5}\frac{2}{c}+u_\varrho,\ \frac{v_\varrho-u_\varrho}{5}\frac{3}{c}+u_\varrho\right) \qquad (\varrho=1, \ldots, N).$$

Offensichtlich ist für $\varrho=1, \ldots, N$

$$\int_{I_\varrho}f_{i,\varrho}(x)f_{j,\varrho}(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{für} \quad i\neq j,\\ \dfrac{1}{N} & \text{für} \quad i=j,\end{cases} \tag{1.1}$$

und

$$\mu(E_\varrho)=\frac{1}{5c}\frac{1}{N}. \tag{1.2}$$

Für jedes $x\in E_\varrho$ gibt es nach Hilfssatz I eine von x abhängige natürliche

---

[3]) Eine Punktmenge werden wir *einfach* nennen, wenn sie die Vereinigungsmenge endlich vieler Intervalle ist.

Zahl $m(x)$ $(<2p)$, so daß die Funktionenwerte $f_{1,\varrho}(x),\ldots,f_{m(x),\varrho}(x)$ positiv sind und

$$(1.3)\qquad f_{1,\varrho}(x)+\cdots+f_{m(x),\varrho}(x)\geqq\sqrt{5}\,A\sqrt{cp}\log p$$

$(\varrho=1,\ldots,N)$ gilt.

Es sei

$$h_{s_{i-1}+j}(x)=\sqrt{a_i}\sum_{\varrho=(j-1)\frac{N}{a_i}+1}^{j\frac{N}{a_i}} f_{i,\varrho}(x)\qquad (j=1,\ldots,a_i;\ i=1,\ldots,2p)$$

und

$$E=E(c,\{a\})=\bigcup_{\varrho=1}^{N}E_\varrho .$$

Es ist evident, daß die so definierten Funktionen $h_l(x)=h_l(c,p,\{a\};x)$ $(l=1,\ldots,s_{2p})$ Treppenfunktionen sind, und nach (1.2) $\mu(E)=\frac{1}{5c}$ ist.

Es sei $1\leqq l\leqq s_{2p}$ ein beliebiger Index. Ist $l=s_{i-1}+j$, so ist nach der Definition und (1.1)

$$\int_0^1 h_l^2(x)\,dx=a_i\sum_{\varrho=(j-1)\frac{N}{a_i}+1}^{j\frac{N}{a_i}}\int_{I_\varrho} f_{i,\varrho}^2(x)\,dx=1,$$

also sind die Funktionen $h_l(x)$ $(l=1,\ldots,s_{2p})$ im Intervall $[0,1]$ normiert.

Nun seien l_1 und l_2 zwei verschiedene Indizes, $1\leqq l_1\leqq s_{2p}$, $1\leqq l_2=s_{2p}$, $l_1\neq l_2$. Ist $l_1=s_{i_1-1}+j_1$ und $l_2=s_{i_2-1}+j_2$, so ist entweder $i_1\neq i_2$, oder $i_1=i_2$, $j_1\neq j_2$. Im ersten Fall ist nach der Definition

$$(1.4)\qquad \int_0^1 h_{l_1}(x)\,h_{l_2}(x)\,dx=\sqrt{a_{i_1}a_{i_2}}\sum_{\varrho}\int_{I_\varrho} f_{i_1,\varrho}(x)f_{i_2,\varrho}(x)\,dx,$$

wo die Summation auf diejenigen Indizes ϱ erstreckt werden soll, die die Bedingungen

$$(j_1-1)\frac{N}{a_{i_1}}<\varrho\leqq j_1\frac{N}{a_{i_1}},\ (j_2-1)\frac{N}{a_{i_2}}<\varrho\leqq j_2\frac{N}{a_{i_2}}$$

erfüllen. Auf Grund von (1.1) ist die rechte Seite von (1.4) gleich 0. (Wenn kein diesen Bedingungen entsprechendes ϱ existiert, dann ist die Summe auf der rechten Seite leer, daher ist sie gleich 0.) In dem zweiten Fall ist es nach der Definition klar, daß das Integral (1.4) gleich 0 ist. Daher sind die Funktionen $h_l(x)$ $(l=1,\ldots,s_{2p})$ im Intervall $[0,1]$ aufeinander orthogonal.

Sei $x\in E$. Dann gibt es ein Index ϱ $(1\leqq\varrho\leqq N)$, so daß $x\in E_\varrho$ ist, und folglich gibt es nach der Definition der Funktionen $h_l(x)$ zu jedem

i $(1 \leqq i \leqq 2p)$ einen wohlbestimmten Index $j(i, x)$ $(1 \leqq j(i, x) \leqq a_i)$, so daß

$$h_{s_{i-1}+j(i,x)}(x) = \sqrt{a_i}\, f_{i,\varrho}(x)$$

und

$$h_{s_{i-1}+j}(x) = 0 \qquad \text{für} \qquad j \neq j(i, x),\ 1 \leqq j \leqq a_i$$

gilt. Daraus folgt auf Grund von (1. 3), daß es eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(< 2p)$ gibt, derart, daß

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}} h_1(x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{s_{m(x)}}}} h_{s_{m(x)}}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_1}} h_{j(1,x)}(x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{m(x)}}} h_{s_{m(x)-1}+j(m(x),x)}(x) =$$

$$= f_{1,\varrho}(x) + \cdots + f_{m(x),\varrho}(x) \geqq \sqrt{5}\, A \sqrt{cp} \log p$$

ist.

Also erfüllen die so definierten Funktionen $h_l(x) = h_l(c, p, \{a\}; x)$ $(l = 1, \ldots, s_{2p})$ die im Hilfssatz III gestellten sämtlichen Bedingungen.

Damit ist der Hilfssatz III vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz I.

Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, die die Bedingung $w(n) = o(\log n)$ erfüllt. Dann kann man eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge $\{\bar{w}(n)\}$ wählen, derart, daß

$$w(n) = o(\bar{w}(n)) \tag{2. 1}$$

und

$$\bar{w}(n) = o(\log n) \tag{2. 2}$$

gilt. Zum Beispiel erfüllt die Folge

$$\bar{w}(n) = w(n)\left(\frac{\log n}{w(n)}\right)^{1/2} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

$\bar{w}(0) = \bar{w}(1) = \bar{w}(2)$ diese Bedingungen.

Nach (2. 2) kann eine aus geraden Zahlen bestehende Folge $(4 \leqq)\, n_1 < \cdots < n_m < \cdots$ angegeben werden, so daß

$$\frac{\bar{w}(n)}{\log n} \leqq \frac{1}{m^2} \qquad (n > N_m;\ m = 1, 2, \ldots) \tag{2. 3}$$

gilt; wobei

$$N_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} \qquad (m \geqq 1)$$

gesetzt wird (wir setzen noch $N_0 = 0$). Da $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} < 2^{n_m+1}$ ist, so gilt

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} > \frac{2^{n_{m+1}}}{2^{n_m+1}} \geqq 2 \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2. 4}$$

Es sei danach $a_0 = \cdots = a_{N_1}$ und

$$a_n = \frac{1}{m^2 \sqrt{N_{m+1}-N_m}} \qquad (N_m \leqq n < N_{m+1};\ m = 1, 2, \ldots).$$

Es ist klar, daß

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=N_m}^{N_{m+1}-1} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = O(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty \tag{2.5}$$

gilt.

Wir werden nun im Grundintervall $[a, b]$ ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ von Treppenfunktionen und eine Folge $\{G_m\}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ von einfachen Teilmengen aus $[a, b]$ definieren, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) für jedes n gilt

$$|\Phi_n(x)| \leqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{\sqrt{b-a}} M \qquad (a \leqq x \leqq b), \tag{2.6}$$

wo β und M die im Hilfssatz II vorkommenden positiven Zahlen sind;

b) für jedes $x \in G_m$ gibt es eine von x abhängige natürliche Zahl $n_m(x)\ (< N_{m+1} - N_m)$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{N_m+1}(x), \ldots, \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)$ gleiche Vorzeichen haben und

$$|\Phi_{N_m+1}(x) + \cdots + \Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{2\sqrt{b-a}} C \sqrt{N_{m+1}-N_m} \log(N_{m+1}-N_m) \tag{2.7}$$

gilt, wobei C die im Hilfssatz II vorkommende positive Zahl bedeutet;

c) die Mengen $\{G_m\}$ sind stochastisch unabhängig, und G_m hat das Maß

$$\mu(G_m) = \frac{b-a}{2(\beta+1)}. \tag{2.8}$$

Es seien $g_l(p; x)$ $(l = 1, \ldots, p^2)$ die in Hilfssatz II vorkommenden Funktionen. Ist $I = [u, v]$ ein beliebiges endliches Intervall, so sei

$$g_l(p, I; x) = \begin{cases} \sqrt{\beta+1}\, g_l\left(p; -1 + (\beta+1)\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l = 1, \ldots, p^2)$ und

$$G(I) = \left[\frac{v-u}{\beta+1}\left(\frac{1}{2}+1\right) + u,\ \frac{v-u}{\beta+1} 2 + u\right).$$

Offensichtlich ist

$$\int_I g_i(p, I; x)\, g_j(p, I; x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j, \\ \mu(I) & \text{für} \quad i = j, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\mu(G(I)) = \frac{\mu(I)}{2(\beta+1)}, \tag{2.10}$$

und nach dem Hilfssatz II gibt es für jedes $x \in G(I)$ eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)$ $(< p^2)$ derart, daß die Funktionenwerte $g_1(p, I; x), \ldots$ $\ldots, g_{m(x)}(p, I; x)$ positiv sind und die Ungleichung

$$(2.11) \qquad g_1(p, I; x) + \cdots + g_{m(x)}(p, I; x) \geqq \sqrt{\beta+1}\, C p \log p$$

besteht.

Es sei $\Phi_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}$. Wir bezeichnen mit I' und I'' die zwei Hälften des Intervalls $[a, b]$. Wir wenden den Hilfssatz II für $p = 2^{n_1/2}$ an. Es sei

$$\Phi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} (g_l(p_1, I'; x) - g_l(p_1, I''; x)) \qquad (1 \leqq l \leqq N_1)$$

und

$$G_0 = G(I') \cup G(I'').$$

Nach dem Hilfssatz II sind die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq N_1)$ Treppenfunktionen, die die Ungleichung (2.6) erfüllen. Nach (2.9) und der Definition kann leicht gezeigt werden, daß sie in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden. Ferner sind nach (2.10) und (2.11) auch (2.7) und (2.8) für $m = 0$ erfüllt. Offensichtlich ist die Menge G_0 einfach.

Es sei $k (\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(0 \leqq n \leqq N_k)$ und die einfachen Mengen G_m $(0 \leqq m \leqq k-1)$ bereits definiert wurden, undzwar so, daß diese Funktionen in $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden, die Ungleichung (2.6) erfüllen und daß auch die Bedingungen b) und c) für $m = 0, \ldots, k-1$ erfüllt sind, speziell die Mengen G_m $(0 \leqq m \leqq k-1)$ stochastisch unabhängig sind.

Dann gibt es eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, auf denen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(0 \leqq n \leqq N_k)$ konstant ist und jede Menge G_m $(0 \leqq m \leqq k-1)$ als die Vereinigung von einigen I_ϱ entsteht. Wir bezeichnen die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ mit I'_ϱ und I''_ϱ.

Nun werden wir den Hilfssatz II mit $p = p_{k+1} = \sqrt{N_{k+1} - N_k} = 2^{n_{k+1}/2}$ an. Es sei gesetzt

$$\Phi_{N_k+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left(\sum_{\varrho=1}^{r} g_l(p_{k+1}, I'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{r} g_l(p_{k+1}, I''_\varrho; x) \right)$$

$(l = 1, \ldots, N_{k+1} - N_k)$ und

$$G_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r} (G(I'_\varrho) \cup G(I''_\varrho)).$$

Nach dem Hilfssatz II sind auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(N_k < n \leqq N_{k+1})$ Treppenfunktionen, die die Ungleichung (2.6) erfüllen. Auf Grund der Definition und der Relation (2. 9) folgt es leicht, daß auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0 \leqq n \leqq N_{k+1})$ ein orthonormiertes System in $[a, b]$ bilden. Ferner ist es nach (2. 10) und (2. 11) klar, daß (2. 7) und (2. 8) auch für $m=k$ gelten. Es ist ferner klar, daß auch die Menge G_k einfach ist und die Mengen $G_0, \ldots, G_k$ stochastisch unabhängig sind.

Danach ergibt sich mit vollständiger Induktion ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{G_m\}$, für welche die Bedingungen a)—c) erfüllt sind.

Es sei $x \in G_m$. Nach der Bedingung b) existiert eine natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< N_{m+1}-N_m)$ derart, daß (2. 7) erfüllt wird. Daraus erhalten wir nach (2. 3) die Abschätzung

$$|a_{N_m+1}\Phi_{N_m+1}(x)+\cdots+a_{N_m+n_m(x)}\Phi_{N_m+n_m(x)}(x)| \geqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{2\sqrt{b-a}}C\frac{1}{m^2}\log(N_{m+1}-N_m) >$$

$$> \frac{\sqrt{\beta+1}}{4\sqrt{b-a}}C\frac{1}{m^2}\log N_{m+1} \geqq \frac{\sqrt{\beta+1}}{4\sqrt{b-a}}C\overline{w}(N_{m+1}). \tag{2.12}$$

Ist $x \in \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} G_m$, so wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt. Nach der Bedingung c) ergibt sich aber, mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas, daß $\mu(\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} G_m)=b-a$ ist.

Wegen (2. 5) und des in der Einleitung zitierten Satzes von G. ALEXITS ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Phi_\nu(x)$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$-summierbar.

Wir bezeichnen mit $s_n(x)$ die n-te Partialsumme dieser Reihe:

$$s_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \Phi_\nu(x).$$

Nach (2. 4) erhalten wir mit Anwendung des in der Einleitung erwähnten Kolmogoroffschen Satzes, daß die Folge $\{s_{N_m}(x)\}$ fast überall konvergiert und so nach (2. 1) fast überall

$$s_{N_m}(x)=O(\overline{w}(N_m))$$

gilt. Daraus erhalten wir endlich auf Grund von (2. 1), (2. 12) und den obigen Bemerkungen, daß fast überall

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)}|s_N(x)|=\infty$$

gilt.

Damit wurde Satz I vollständig bewiesen.

§ 3. Beweis von Satz II.

Es sei $\{a_n^*\} \in l^2$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingungen

$$\sqrt{n}\, a_n^* \geqq \sqrt{n+1}\, a_{n+1}^* \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.1}$$

und

$$\sum_{n=4}^{\infty} (a_n^*)^2 (\log\log n)^2 = \infty \tag{3.2}$$

erfüllt. Nach (3. 1) kann a_n^* in der folgenden Form geschrieben werden:

$$a_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}\, \lambda_n} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

wo $\{\lambda_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge ist.

Dann ergibt sich mit einfacher Rechnung aus (3. 2), daß

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{\lambda_{2^n}^2} = \infty$$

ist. Wir setzen $l_n = \lambda_{2^n}$ $(n=2,3,\ldots)$ und $N_0=0$, $N_m = 2(2+\cdots+2^m)$ $(m \geqq 1)$. Auf Grund der Monotonität der Folge $\{l_n\}$ erhalten wir mittels einer einfachen Rechnung, daß

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_{m+1} \log^2 N_{m+1}}{l_{N_{m+1}}^2} = \infty \tag{3.3}$$

ist. Es soll bemerkt werden, daß

$$\sqrt{2^{m+1}} > \frac{1}{2}\sqrt{N_{m+1}}, \quad m+1 \leqq \frac{1}{3}\log N_{m+1} \qquad (m=0,1,\ldots) \tag{3.4}$$

ist.

Wir werden nun ein aus Treppenfunktionen bestehendes, im Grundintervall $[a,b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ und eine Folge $\{E_m\}$ $(m=0,1,\ldots)$ von einfachen Teilmengen von $[a,b]$ definieren, derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

ā) für jedes $x \in E_m$ gibt es eine natürliche Zahl $n_m(x)$ $(< 2^{m+2})$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{2^{N_m+1}+1}(x), \ldots, \Phi_{2^{N_m+n_m(x)+1}}(x)$ alle nichtnegativ oder alle nichtpositiv sind und der Ungleichung

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1^{(m)}}} \Phi_{2^{N_m+1}+1}(x) + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^{(m)}_{s^{(m)}_{n_m(x)}}}} \Phi_{2^{N_m+n_m(x)+1}}(x) \right| \geqq \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}} A \lambda_{2^{N_m+1}} \tag{3.5}$$

genügen, wobei A die im Hilfssatz III vorkommende Konstante, $s_0^{(m)}=0$, $s_i^{(m)} = a_1^{(m)} + \cdots + a_i^{(m)}$ $(i=1,\ldots,2^{m+2};\ m=0,1,\ldots)$ und $\bar{a}_j^{(m)} = a_i^{(m)} = 2^{N_m+i}$ $(s_{i-1}^{(m)} < j \leqq s_i^{(m)})$ bezeichnen;

b) die Mengen E_m $(m=0,1,\ldots)$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(E_m) \geqq \frac{b-a}{10} \min\left\{1, \frac{N_{m+1}\log^2 N_{m+1}}{l^2_{N_{m+1}}}\right\} \tag{3.6}$$

Für ein beliebiges, endliches Intervall $I=[u,v]$ setze man

$$h_l(c,p,\{a\},I;x)=\begin{cases} h_l\left(c,p,\{a\};\dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für } u<x<v,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(l=1,\ldots,s_{2p})$, wo $h_l(c,p,\{a\};x)$ $(l=1,\ldots,s_{2p})$ die im Hilfssatz III vorkommenden Funktionen bezeichnen, und sei $E(I)$ das Bild der Menge $E=E(c,\{a\})$, das sich durch die Transformation $y=u+(v-u)x$ ergibt. Offenbar hat man

$$\int_I h_i(c,p,\{a\},I;x)h_j(c,p,\{a\},I;x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{für } i\neq j,\\ \mu(I) & \text{für } i=j,\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\mu(E(I))=\frac{\mu(I)}{5c} \tag{3.8}$$

und für jedes $x\in E(I)$ existiert eine von x abhängige natürliche Zahl $m(x)(<2p)$, so daß die Funktionenwerte $h_1(c,p,\{a\},I;x),\ldots,h_{s_{m(x)}}(c,p,\{a\},I;x)$ nichtnegativ sind und der Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_1}}h_1(c,p,\{a\},I;x)+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{s_{m(x)}}}}h_{s_{m(x)}}(c,p,\{a\},I;x)\geqq\sqrt{5}\,A\sqrt{cp}\log p \tag{3.9}$$

genügen, wo $A, s_u, \bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_{s_{2p}}$ die im Hilfssatz III vorkommenden Zahlen sind.

Es sei

$$\Phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}r_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\quad(n=0,1,2)$$

wo $r_n(x)=\operatorname{sign}\sin 2^n\pi x$ die n-te Rademachersche Funktion bezeichnet. Es ist evident, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=0,1,2)$ Treppenfunktionen sind und im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden.

Bezeichnen wir mit $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho=1,\ldots,4)$ die vier Viertel des Intervalls $[a,b]$ und mit $\bar{I}_\varrho'$ und $\bar{I}_\varrho''$ die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ $(\varrho=1,\ldots,4)$. Wenden wir nun den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_1=\left[\frac{l^2_{N_1}}{N_1\log^2 N_1}+1\right]^{4)},\quad p_1=2,\quad a_i^{(0)}=2^i\ (i=1,\ldots,2p_1)$$

[4]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α

an. Es sei.

$$\Phi_{2+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{4} h_l(c_1, p_1, \{a^{(0)}\}, \bar{I}'_\varrho; x)-\sum_{\varrho=1}^{4} h_l(c_1, p_1, \{a^{(0)}\}, \bar{I}''_\varrho; x)\right)$$

$(l=1, \ldots, 2+\cdots+2^{2p_1})$ und

$$E_0=\bigcup_{\varrho=1}^{4}(E(c_1, \bar{I}'_\varrho)\cup E(c_1, \bar{I}''_\varrho)).$$

Nach dem Hilfssatz III sind auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(2<n\leqq 2^{N_1+1})$ Treppenfunktionen. Auf Grund der Definition und der Relation (3, 7) kann leicht gezeigt werden, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_1+1})$ im Grundintervall $[a, b]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus (3. 8) folgt, durch einfache Rechnung, daß für $m=0$ (3. 6) erfüllt wird. Nach (3. 4) und (3. 9) kann ferner gezeigt werden, daß für $m=0$ auch (3. 5) erfüllt wird. Offensichtlich ist auch die Menge E_0 einfach.

Es sei $k(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Nehmen wir an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_k+1})$ und die einfachen Mengen E_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ bereits definiert wurden, derart, daß diese Funktionen ein orthonormiertes System im Intervall $[a, b]$ bilden, die Bedingungen $\bar{a})$ und $\bar{b})$ für $m=0, \ldots, k-1$ erfüllt sind, insbesondere also die Mengen $E_0, \ldots, E_{k-1}$ stochastisch unabhängig sind.

Dann gibt es eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1, \ldots, r)$, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_k+1})$ konstant ist und jede Menge E_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ die Vereinigung von einigen I_ϱ ist. Bezeichnen wir mit I'_ϱ und I''_ϱ die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ $(\varrho=1, \ldots, r)$.

Wir wenden nun den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_{k+1}=\left[\frac{l^2_{N_{k+1}}}{N_{k+1}\log^2 N_{k+1}}+1\right],\quad p_{k+1}=2^{k+1},\quad a_i^{(k)}=2^{N_k+i}\qquad (i=1, \ldots, 2p_{k+1})$$

an. Es sei gesetzt:

$$\Phi_{2^{N_k+1}+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, I'_\varrho; x)-\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, I''_\varrho; x)\right)$$

für $l=1, \ldots, 2^{N_k+1}+\cdots+2^{N_k+2p_{k+1}}$, und

$$E_k=\bigcup_{\varrho=1}^{r}(E(c_{k+1}, I'_\varrho)\cup E(c_{k+1}, I''_\varrho)).$$

Diese Funktionen $\Phi_n(x)$ $(2^{N_k+1}<n\leqq 2^{N_{k+1}+1})$ sind auch Treppenfunktionen. Nach der Definition und der Relation (3. 7) kann leicht gezeigt werden, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq 2^{N_{k+1}+1})$ ein orthonormiertes System im Intervall $[a, b]$ bilden. Auf Grund von (3. 8) ist es leicht ersichtlich, daß (3. 6)

auch für $m=k$ erfüllt wird. Nach (3.4) und (3.9) ergibt sich, daß (3.5) auch für $m=k$ besteht. Offenbar ist auch E_k eine einfache Menge und die Mengen $E_0, \ldots, E_k$ sind stochastisch unabhängig.

Auf diese Weise erhalten wir mit vollständiger Induktion ein unendliches orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{E_m\}$, so daß die Bedingungen $\bar{a}$) und $\bar{b}$) erfüllt sind.

Es sei $x \in E_m$. Dann ist $N_m + n_m(x) + 1 \leqq N_m + 2^{m+2} = N_{m+1}$. Da $a_n \geqq \eta a_n^*$ $(n=1, 2, \ldots)$ und die Folge $\{\lambda_n\}$ monoton nichtabnehmend ist, so erhalten wir aus (3.5):

$$(3.10) \qquad |a_{2^{N_m+1}+1} \Phi_{2^{N_m+1}+1}(x) + \cdots + a_{2^{N_m+n_m(x)+1}} \Phi_{2^{N_m+n_m(x)+1}}(x)| \geqq \frac{\eta\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}} A.$$

Für $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} E_m$ wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt. Aber aus (3.3) und der Bedingung $\bar{b}$), mit der Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas folgt: $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m) = b-a$.

Aus (3.10) folgt, daß die Folge der 2^n-ten Partialsummen der Reihe

$$(3.11) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall divergiert. Wegen der Bedingung $\{a_n\} \in l^2$ folgt aus dem in der Einleitung erwähnten Kolmogoroffschen Satz, daß die Reihe (3.11) im Intervall $[a, b]$ fast nirgends $(C, 1)$-summierbar ist.

Damit wurde der Satz II vollständig bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz III.

Es sei $\{w(n)\}$ eine positive Zahlenfolge, die die Bedingung

$$(4.1) \qquad \sqrt{n} = o(w(n))$$

erfüllt. Auf Grund von (4.1) kann eine Folge von geraden Zahlen $(2 \leqq) n_1 < \cdots < n_m < \cdots$ definiert werden, so daß mit der Bezeichnung $M_0 = 0$, $M_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m}$ $(m=1, 2, \ldots)$ gilt:

$$(4.2) \qquad \frac{w(n)}{\sqrt{n}} \geqq m \quad \text{für} \quad n \geqq M_m \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

Wegen $M_m = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_m} < 2^{n_m+1}$ ist

$$(4.3) \qquad \frac{M_{m+1}}{M_m} > \frac{2^{n_{m+1}}}{2^{n_m+1}} \geqq 2 \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

Es sei

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{M_{m+1}-M_m}}\frac{1}{\sqrt{m}\log(m+1)}\qquad (M_m<n\leqq M_{m+1};\ m=1,2,\ldots)$$

und $a_i=a_{M_1+1}$ $(i=0,\ldots,M_1)$.

Es ist klar, daß die so definierte Koeffizientenfolge positiv, monoton nichtwachsend ist. Ferner gilt

$$\sum_{n=M_1+1}^{\infty}a_n^2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}}a_n^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\log^2(m+1)}<\infty. \tag{4.4}$$

Endlich ist nach (4.2)

$$\sum_{n=M_1+1}^{\infty}\frac{a_n}{w(n)}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}}\frac{a_n}{w(n)}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m}\log(m+1)}\frac{1}{\sqrt{M_{m+1}-M_m}}\sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}}\frac{1}{w(n)}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{m}\log(m+1)}\frac{1}{\sqrt{M_{m+1}-M_m}}\sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{w(n)}=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{3/2}}<\infty. \tag{4.5}$$

Nach (4.4) und (4.5) erfüllt die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ die in der Behauptung des Satzes III vorkommenden Bedingungen.

Wir werden nun im Intervall (a,b) ein orthonormiertes Funktionensystem von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots)$ und eine Folge $\{F_m\}$ $(m=0,1,\ldots)$ von einfachen Teilmengen aus $[a,b]$ definieren, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) für jedes $x\in F_m$ existiert eine von x abhängige natürliche Zahl $n_m(x)$ $(<2^{m+2})$ derart, daß die Funktionenwerte $\Phi_{M_{N_m+1}+1}(x),\ldots,\Phi_{M_{N_m+n_m(x)}+1}(x)$ alle nichtnegativ, oder alle nichtpositiv sind und der Ungleichung

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\bar{\bar a}_1^{(m)}}}\Phi_{M_{N_m+1}+1}(x)+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\bar{\bar a}^{(m)}_{s^{(m)}_{n_m(x)}}}}\Phi_{M_{N_m+n_m(x)}+1}(x)\right|\geqq$$

$$\geqq\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}}A\sqrt{N_{m+1}}\log N_{m+1} \tag{4.6}$$

genügen, wobei A die im Hilfssatz III vorkommende positive Konstante, $s_0^{(m)}=0$, $s_i^{(m)}=a_1^{(m)}+\cdots+a_i^{(m)}$ $(i=1,\ldots,2^{m+2};\ m=0,1,\ldots)$, und $N_0=0$, $N_m=2(2+\cdots+2^m)$ $(m\geqq 1)$, $\bar{\bar a}_j=a_i^{(m)}=M_{N_m+i+1}-M_{N_m+i}$ $(s_{i-1}^{(m)}<j\leqq s_i^{(m)})$ sind,

b) die Mengen $\{F_m\}$ sind stochastisch unabhängig und es gilt

$$\mu(F_m)=\frac{b-a}{5}. \tag{4.7}$$

Es sei bemerkt, daß

$$\sqrt{2^{m+1}}<\frac{1}{2}\sqrt{N_{m+1}},\ m+1\geqq\frac{1}{3}\log N_{m+1}\qquad (m=0,1,\ldots). \tag{4.8}$$

Es sei nun gesetzt:

$$\Phi_l(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}r_l\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad \text{für} \quad l=0,\dots,M_1$$

mit $r_l(x)=\operatorname{sign}\sin 2^l\pi x$. Es ist klar, daß diese Funktionen Treppenfunktionen sind und im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden. So kann eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{I}_\varrho\,(\varrho=1,\dots,\bar{r})$ angegeben werden, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(n=0,\dots,M_1)$ konstant ist. Die zwei Hälften des Intervalls $\bar{I}_\varrho$ seien mit $\bar{I}'_\varrho$ und $\bar{I}''_\varrho$ bezeichnet $(\varrho=1,\dots,\bar{r})$.

Wir wenden den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_1=1,\ p_1=2;\ a_i^{(0)}=M_{i+1}-M_i \qquad (i=1,\dots,2p_1)$$

an. Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen setzen wir

$$\Phi_{M_1+l}(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{\bar{r}}h_l(c_1,p_1,\{a^{(0)}\},\bar{I}'_\varrho;x)-\sum_{\varrho=1}^{\bar{r}}h_l(c_1,p_1,\{a^{(0)}\},\bar{I}''_\varrho;x)\right)$$

für $l=1,\dots,M_{N_1+1}-M_1$, und

$$F_0=\bigcup_{\varrho=1}^{\bar{r}}(E(c_1,\bar{I}'_\varrho)\cup E(c_1,\bar{I}''_\varrho)).$$

Nach Hilfssatz III ist es klar, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(M_1<n\leqq M_{N_1+1})$ Treppenfunktionen sind. Auf Grund der Definition und der Relation (3. 7) kann man leicht zeigen, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq M_{N_1+1})$ im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus (3. 8) folgt, daß (4. 7) für $m=0$ erfüllt wird. Aus (3. 9) nach (4. 8) ist es ferner leicht ersichtlich, daß (4. 6) für $m=0$ besteht. Offenbar ist auch die Menge F_0 einfach.

Es sei dann $k(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq M_{N_k+1})$ und die einfachen Mengen F_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ bereits derart definiert wurden, daß diese Funktionen im Intervall $[a,b]$ ein orthonormiertes System bilden, die Bedingungen $\bar{\bar{a}})$ und $\bar{\bar{b}})$ für die Indizes $m=0,\dots,k-1$ erfüllt sind, insbesondere die Mengen $F_0,\dots,F_{k-1}$ stochastisch unabhängig sind.

Es gibt also eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle I_ϱ $(\varrho=1,\dots,r)$, so daß in den einzelnen Teilintervallen jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(0\leqq n\leqq M_{N_k+1})$ konstant ist und jede Menge F_m $(0\leqq m\leqq k-1)$ die Vereinigung von einigen I_ϱ ist. Die zwei Hälften des Intervalls I_ϱ seien I'_ϱ und I''_ϱ $(\varrho=1,\dots,r)$.

Wir wenden jetzt den Hilfssatz III mit den Zahlen

$$c_{k+1}=1,\quad p_{k+1}=2^{k+1},\quad a_i^{(k)}=M_{i+1+N_k}-M_{i+N_k} \qquad (i=1,\dots,2p_{k+1})$$

an. Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei gesetzt:

$$\Phi_{M_{N_k+1}+l}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, I'_\varrho; x) - \sum_{\varrho=1}^{r} h_l(c_{k+1}, p_{k+1}, \{a^{(k)}\}, I''_\varrho; x)\right)$$

für $l = 1, \ldots, M_{N_{k+1}+1} - M_{N_k+1}$ und

$$F_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r} (E(c_{k+1}, I'_\varrho) \cup E(c_{k+1}, I''_\varrho)).$$

Nach dem Hilfssatz III sind auch diese Funktionen Treppenfunktionen. Nach der Definition und der Relation (3. 7) ist es leicht einzusehen, daß auch die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(0 \leqq n \leqq M_{N_{k+1}+1})$ ein orthonormiertes System im Intervall $[a, b]$ bilden. Aus (3. 8) folgt, daß (4. 7) auch für $m = k$ erfüllt wird. Aus (3. 9) auf Grund von (4. 8) kann leicht gezeigt werden, daß (4. 6) auch für $m = k$ besteht. Es ist ferner klar, daß auch F_k eine einfache Menge ist und die Mengen $F_0, \ldots, F_k$ stochastisch unabhängig sind.

Auf diese Weise erhalten wir mit vollständiger Induktion ein im Intervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Mengenfolge $\{F_m\}$, so daß die Bedingungen $\bar{\bar{a}}$) und $\bar{\bar{b}}$) erfüllt werden.

Es sei $x \in F_m$. Da $N_m + n_m(x) < N_{m+1}$ ist, ergibt sich nach der Definition der Folge $\{a_n\}$ und der Ungleichung (4. 6), daß

$$|a_{M_{N_m+1}+1}\Phi_{M_{N_m+1}+1}(x) + \cdots + a_{M_{N_m+n_m(x)+1}}\Phi_{M_{N_m+n_m(x)+1}}(x)| \geqq$$

$$\geqq \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}} A \frac{\sqrt{N_{m+1}} \log N_{m+1}}{\sqrt{N_m + n_m(x)} \log (N_m + n_m(x) + 1)} \geqq \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{b-a}} A \tag{4. 9}$$

gilt.

Für $x \in \overline{\lim_{m \to \infty}} F_m$ wird diese Ungleichung für unendlich viele m erfüllt. Jedoch nach der Bedingung $\bar{\bar{b}}$) ergibt sich mit Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas: $\mu(\overline{\lim_{m\to\infty}} F_m) = b - a$.

Aus (4. 9) erhalten wir auf diese Weise, daß die Folge der M_n-ten Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{4. 10}$$

im Intervall $[a, b]$ fast überall divergiert. Daraus und aus (4. 3) folgt mit Anwendung des in der Einleitung erwähnten Kolmogoroffschen Satzes, daß die Reihe (4. 10) im Intervall $[a, b]$ fast nirgends $(C, 1)$-summierbar ist.

Damit wurde der Satz III vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis.

ALEXITS, G., [1] Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 5—9.

KOLMOGOROFF, A. N., [1] Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, 5 (1924), 96—97.

MENCHOFF, D., [1] Sur les séries de fonctions orthogonales, Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, 8 (1926), 56—108.

RADEMACHER, H., [1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, 87 (1922), 112—138.

TANDORI, K., [1] Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, 18 (1957), 57—130.

ZYGMUND, A., [1] *Trigonometrical series* (Warszawa—Lwów, 1935); [2] Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, 10 (1927), 356—362; [3] On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamenta Math.*, 16 (1930), 90—107.

(Eingegangen am 2. September 1957.)